問題１

ＢＣ＝xとおくと，余弦定理より

$$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$$

$$7^2=3^2+x^2-2\cdot 3\cdot x\cdot\cos 120^\circ$$

$$49=9+x^2-2\cdot 3\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2+3x-40=0$$

$$(x+8)(x-5)=0$$

$x>0$より

$$x=5$$

したがって，Ａ地点からＢ地点を経由してＣ地点まで行くときの距離は３＋５＝８(km)である。よって，移動する速さは一定だから

$$8\div 7=1.142\cdots$$

$$\fallingdotseq 1.14\text{(倍)}$$

の時間がかかる。

（答）　1.14倍

問題２

３の倍数の性質は，各位の数の和が３の倍数であることである。以下，それを証明する。

６けたの整数で，十万，一万，千，…，一の位の数をそれぞれ a，b，c，d，e，fとし，この和が３k(kは整数)と表されるとする。この６けたの数は

$$100000a+10000b+1000c+100d+10e+f$$

$$=99999a+9999b+999c+99d+9e+(a+b+c+d+e+f)$$

$$=3(33333a+3333b+333c+33d+3e+k)$$

となり，この６けたの整数も３の倍数であることがいえた。

１から６までの６個の整数をすべて並べてできる６けたの整数は，各位の和が

$$1+2+3+4+5+6=21=3\times 7$$

であり，３の倍数である。よって，このようにしてできる６けたの整数は必ず３の倍数となる。

以上から，求める確率は１である。

（答）　1

問題３

$3^{2n-1}+2^{n+1}$が７の倍数になることを数学的帰納法で証明する。

(Ⅰ)　$n=1$のとき

$$3^1+2^2=3+4=7$$

よって，$n=1$のときは成り立つ。

(Ⅱ)　$n=k$のとき

$$3^{2k-1}+2^{k+1}=7m\ (m\text{は整数})$$

と表されたとする。このとき

$$3^{2(k+1)-1}+2^{(k+1)+1}=9\cdot 3^{2k-1}+2^{k+2}$$

$$=9\cdot(7m-2^{k+1})+2\cdot 2^{k+1}$$

$$=7\cdot 9m-7\cdot 2^{k+1}$$

$$=7(9m-2^{k+1})$$

したがって，$n=k+1$のときも成り立つ。

以上(Ⅰ)，(Ⅱ)から，題意は示された。

問題４

$\vec{a}=(1,\ -2,\ -1)$，$\vec{b}=(3,\ 3,\ 6)$より

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{3^2+3^2+6^2}=3\sqrt{6}$$

である。また

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 3+(-2)\cdot 3+(-1)\cdot 6$$

$$=-9$$

よって

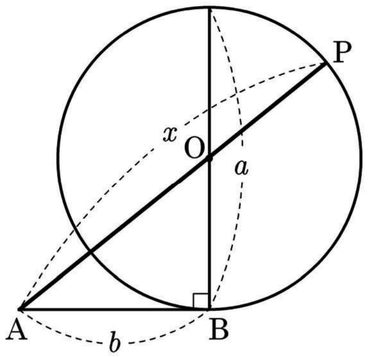
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{-9}{\sqrt{6}\times 3\sqrt{6}}=-\frac{1}{2}$$

したがって，$\theta=120^\circ$である。

（答）　120°

問題５

⑴



ＡＯの延長と円Ｏとの交点をＰとしたとき，ＡＰが求める長さとなる。

⑵　２次方程式 $x^2-ax=b^2$ の正の解は

$$x=\frac{a+\sqrt{a^2+4b^2}}{2}$$

⑴の図の△ＯＡＢについて，三平方の定理より

$$\mathrm{AO}=\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+b^2}=\frac{\sqrt{a^2+4b^2}}{2}$$

したがって，ＡＯの長さに円Ｏの半径を足したものが，x に等しくなる。よって

$$\mathrm{AP}=\mathrm{OP}+\mathrm{AO}=\frac{a}{2}+\frac{\sqrt{a^2+4b^2}}{2}$$
$$=x$$

問題６

$n=m+1$ であるので

$$x^2\pm mx-n=x^2\pm mx-(m+1)$$
$$=(x\pm m\pm 1)(x\mp 1)$$

（複号同順）

$$x^2\pm nx+m=x^2\pm(m+1)x+m$$
$$=(x\pm 1)(x\pm m)$$

（複号同順）

したがって，どれも因数分解できる。

（別解）

整数係数の２次式 x^2+ax+b が，係数が整数の範囲で因数分解できるとき，$D=a^2-4b$ の値はある整数の２乗の形で表される。

$x^2\pm mx-n$ のとき

$$D=m^2+4n=m^2+4m+4=(m+2)^2$$

$x^2\pm nx+m$ のとき

$$D=n^2-4m=(m+1)^2-4m$$
$$=m^2-2m+1=(m-1)^2$$

したがって，どれも因数分解できる。

問題７

放物線 $y=x^2-2$ と直線 $y=ax$ の２つの式を連立して

$$x^2-2=ax$$
$$x^2-ax-2=0 \qquad \cdots①$$

①の判別式を D とすると

$$D=a^2+8>0$$

したがって，a の値にかかわらず，①は相異なる２つの実数解をもつ。この２つの実数解を α，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta=a$$
$$\alpha\beta=-2$$

このことから

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=a^2+8$$

よって，$\beta-\alpha>0$ より

$$\beta-\alpha=\sqrt{a^2+8}$$

放物線と直線とで囲まれた部分の面積を S とすると

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\{ax-(x^2-2)\}\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

と表されるから

$$\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{9}{2}$$
$$(\beta-\alpha)^3=27$$
$$\beta-\alpha=3$$
$$\sqrt{a^2+8}=3$$
$$a^2+8=9$$
$$a^2=1$$
$$a=\pm 1$$

（答）　$a=\pm 1$