問題１

$$\begin{cases} y=\dfrac{-2x+8}{x+2} & \cdots① \\ x^2+y^2=5 & \cdots② \end{cases}$$

①より

$2x+xy+2y=8\quad\cdots①'$

$x+y=s$，$xy=t$ とおく。

①′より

$2s+t=8\quad\cdots①''$

②より

$(x+y)^2-2xy=5$

$s^2-2t=5\quad\cdots②'$

①″，②′より

$(s,\ t)=(3,\ 2)$，$(-7,\ 22)$

$(s,\ t)=(3,\ 2)$ のとき，x，y は方程式

$X^2-3X+2=0$ の解である。

このとき，$X=1$，2 より

$(x,\ y)=(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$

$(s,\ t)=(-7,\ 22)$ のとき，同様に

$X^2+7X+22=0$

$$X=\frac{-7\pm\sqrt{39}\,i}{2}$$

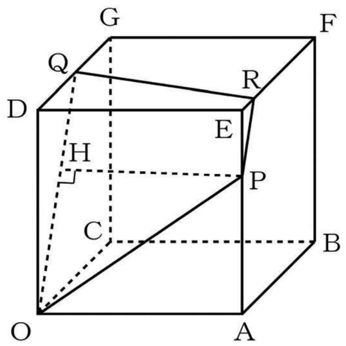
x，y は実数だから不適切。

したがって，共有点の座標は $(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$

（答）$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$

問題２

⑴　点Ｒは平面ＯＰＲＱ上にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とおくことができる。



$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=s\left(\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)+t\left(\vec{d}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$=s\vec{a}+\frac{t}{2}\vec{c}+\left(\frac{2}{3}s+t\right)\vec{d}\quad\cdots①$$

また，点Ｒは辺ＥＦ上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}+u\overrightarrow{\mathrm{EF}}$$

$$=\vec{a}+\vec{d}+u\vec{c}\quad\cdots②$$

$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ はどれも $\vec{0}$ でなく，どの２つも平行でないから，①，②より

$$\begin{cases} s=1 \\ \dfrac{t}{2}=u \\ \dfrac{2}{3}s+t=1 \end{cases}\qquad s=1,\ t=\frac{1}{3},\ u=\frac{1}{6}$$

（答）$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{c}+\vec{d}$

⑵　Ｈは直線ＯＱ上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=-\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

$$=-\left(\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)+k\left(\vec{d}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$=-\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{c}+\left(k-\frac{2}{3}\right)\vec{d}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より

$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$

$$\left(-\vec{a}+\frac{k}{2}\vec{c}+\left(k-\frac{2}{3}\right)\vec{d}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}\right)=0$$

$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot\vec{d}=0$ より

$$\frac{k}{4}|\vec{c}|^2+\left(k-\frac{2}{3}\right)|\vec{d}|^2=0$$

$|\vec{c}|=|\vec{d}|=6$ より

$$k=\frac{8}{15}$$

（答）$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=-\vec{a}+\dfrac{4}{15}\vec{c}-\dfrac{2}{15}\vec{d}$

問題３

続いた整数のうち，初めの数をm，最後の数をnとすると

$$\frac{(m+n)(n-m+1)}{2}=1000$$

$$(m+n)(n-m+1)=2000=2^4\times5^3$$

$m+n$が偶数のとき$n-m+1$は奇数，$m+n$が奇数のとき$n-m+1$は偶数となる。

また，

$$m+n>n-m+1>1$$

したがって

$(m+n,\ n-m+1)$

$=(400,\ 5),\ (125,\ 16),\ (80,\ 25)$

$(m,\ n)=(198,\ 202),\ (55,\ 70),\ (28,\ 52)$

$$（答）\begin{cases}28,\ 29,\ 30,\ \cdots,\ 52\\55,\ 56,\ 57,\ \cdots,\ 70\\198,\ 199,\ 200,\ 201,\ 202\end{cases}$$

問題４

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-x^{n+1}}{1+x^n}$$

［１］$|x|>1$のとき

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{x^{n-1}}-x}{\dfrac{1}{x^n}+1}=-x$$

［２］$|x|<1$のとき

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-x^{n+1}}{1+x^n}=x$$

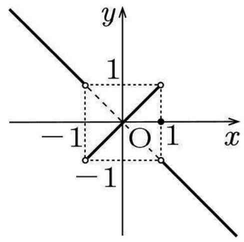
［３］$x=-1$のとき

定義されない。

［４］$x=1$のとき

$$f(1)=\lim_{n\to\infty}\frac{1-1^{n+1}}{1+1^n}=0$$

［１］～［４］より，下のグラフを得る。



問題５

（１）　$d(\mathrm{B},\mathrm{O})=|0-0|+|9-0|=9$

$d(\mathrm{B},\mathrm{A})=|0-4|+|9-2|=11$

したがって，Oに近い。

（答）　O

（２）　P(x,y)とする。

$d(\mathrm{P},\mathrm{O})=|x|+|y|$

$d(\mathrm{P},\mathrm{A})=|x-4|+|y-2|$

点Pが２点O，Aから等距離にある条件は

$|x|+|y|=|x-4|+|y-2|$

$x\geqq0,\ y\geqq0$より

$x+y=|x-4|+|y-2|$

（ⅰ）$0\leqq x\leqq4,\ 0\leqq y\leqq2$のとき

$x+y=-x+4-y+2$

$y=-x+3$

（ⅱ）$0\leqq x\leqq4,\ y>2$のとき

$x+y=-x+4+y-2$

$x=1$

（ⅲ）$x>4,\ 0\leqq y\leqq2$のとき

$x+y=x-4-y+2$

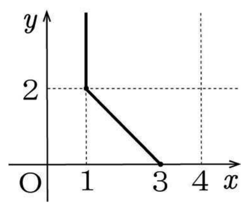
$y=-1$となって不適切。

（ⅳ）$x>4,\ y>2$のとき

$x+y=x-4+y-2$

$0=-6$となって，不適切。

（ⅰ）～（ⅳ）より，次の図を得る。



問題６

$$A=\begin{pmatrix}\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ\\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{pmatrix}$$

$A^n=A^{-1}$ より，$A^{n+1}=E$

A は原点のまわりの 30° の回転移動を表す行列だから

$$A^{n+1}=\begin{pmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ\\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{pmatrix}^{n+1}$$

$$=\begin{pmatrix}\cos(30^\circ\times(n+1)) & -\sin(30^\circ\times(n+1))\\ \sin(30^\circ\times(n+1)) & \cos(30^\circ\times(n+1))\end{pmatrix}$$

また

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos(360^\circ\times m) & \sin(360^\circ\times m)\\ -\sin(360^\circ\times m) & \cos(360^\circ\times m)\end{pmatrix}$$

（m は整数）

$n\geqq 1$ より，$30^\circ\times(n+1)=360^\circ$ となるとき，n は最小。したがって

$n=11$

（答） $n=11$

問題７

⑴ $f(x)=xe^x$ より

$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$

$f''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

$f'''(x)=e^x+(x+2)e^x=(x+3)e^x$

$f^{(4)}(x)=e^x+(x+3)e^x=(x+4)e^x$

（答） $f'(x)=(x+1)e^x$，$f''(x)=(x+2)e^x$
$f'''(x)=(x+3)e^x$，$f^{(4)}(x)=(x+4)e^x$

⑵ ⑴より

$f^{(n)}(x)=(x+n)e^x$

と推測できる。

（答） $f^{(n)}(x)=(x+n)e^x$

⑶ $f^{(n)}(x)=(x+n)e^x$ となることを数学的帰納法により証明する。

［１］$n=1$ のとき

$f'(x)=(x+1)e^x$ より，成り立つ。

［２］$n=k$ のとき成り立つと仮定すると

$f^{(k)}(x)=(x+k)e^x$

$f^{(k+1)}(x)=((x+k)e^x)'=e^x+(x+k)e^x$

$=(x+k+1)e^x$

したがって，$n=k+1$ のときも成り立つ。

［１］，［２］より，すべての正の整数で

$f^{(n)}(x)=(x+n)e^x$ が成り立つ。