問題1

$7x^2-9y^2=391$ …①を満たす整数 x, y は存在しない。以下そのことを示す。

$391=17\times 23$ より，17を法として考える。$-8\leqq n\leqq 8$ について，mod 17 での $7n^2$, $9n^2$ の値は，以下のようになる。

n	$7n^2$	$9n^2$
0	0	0
± 1	7	-8
± 2	-6	2
± 3	-5	-4
± 4	-7	8
± 5	5	4
± 6	-3	1
± 7	3	-1
± 8	6	-2

①を満たす x, y の組が存在するならば

$$7x^2-9y^2\equiv 0 \pmod{17}$$

が成り立つ。これを満たすのは，左の表より

$$x\equiv 0 \pmod{17} \text{ かつ } y\equiv 0 \pmod{17}$$

に限られる。このとき，$x=17p$, $y=17q$（p, q は整数）と表されるので，①に代入すると

$$7(17p)^2-9(17q)^2=391$$

$$7\cdot 17p^2-9\cdot 17q^2=23$$

$$7p^2-9q^2=\frac{23}{17}$$

右辺は非整数なのでこれは p, q が整数であることに反する。

よって，①を満たす整数 x, y の組は存在しない。

問題2

(1) $x\neq 0$ のとき，$f(x)$ は微分可能で

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$$

これは $x\neq 0$ において連続である。

一方 $x=0$ における微分係数について

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x-x)'}{(x^2)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)'}{(2x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0$$

より，$x=0$ のときも $f(x)$ は微分可能で $f'(0)=0$ がわかる。$x=0$ での連続性について

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\sin x)'}{(x^2)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\sin x-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}$$

$$=0=f'(0)$$

より，$f'(x)$ は $x=0$ で連続である。

以上より，すべての実数 x について $f(x)$ は微分可能であり，導関数 $f'(x)$ は連続であることが示された。

(2) (1)の結果より

$$a_n=f'(n\pi)=\frac{n\pi\cos(n\pi)-\sin(n\pi)}{(n\pi)^2}$$

$$=\frac{n\pi(-1)^n}{(n\pi)^2}=\frac{(-1)^n}{n\pi}\quad(n\geqq 1)$$

がわかるので

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\pi}=-\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

一方，関数 $\log_e(1+x)$（e は自然対数の底）のマクローリン展開

$$\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$$

は $-1<x\leqq 1$ で成り立つから，とくに $x=1$ として

$$\log_e 2=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

よって，求める級数の和は

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=-\frac{1}{\pi}\log_e 2$$

（答）$-\dfrac{1}{\pi}\log_e 2$