数学検定

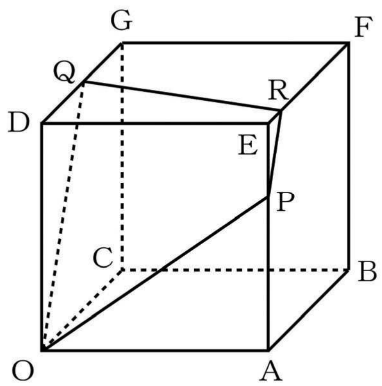
〔準１級〕　　　２次：数理技能検定

問題１．（選択）

直角双曲線 $y=\dfrac{-2x+8}{x+2}$ と円 $x^2+y^2=5$ との共有点の座標を求めなさい。

問題２．（選択）

右の図のように，１辺が６の立方体ＯＡＢＣ‐ＤＥＦＧの辺ＡＥを２：１の比に内分する点をＰ，辺ＤＧの中点をＱとします。３点Ｏ，Ｐ，Ｑを通る平面と辺ＥＦとの交点をＲとします。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とするとき，次の問いに答えなさい。



（１）　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表しなさい。

（２）　点Ｐから直線ＯＱに垂線を引き，ＯＱとの交点をＨとします。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を用いて表しなさい。

問題３．（選択）

いくつかの続いた正の整数の和が１０００であるとき，この続いた整数の組を求めなさい。

問題４．（選択）

次の関数$y=f(x)$のグラフをかきなさい。

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x-x^{n+1}}{1+x^n}$$

問題５．（選択）

Ｏを原点とする座標平面上の２点$\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$に対して，それらの距離$d(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2)$を

$$d(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

と定義します。このとき，$d(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2)>d(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_3)$ならば，点$\mathrm{P}_1$は点$\mathrm{P}_2$よりも点$\mathrm{P}_3$のほうに近く，$d(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2)=d(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_3)$ならば，点$\mathrm{P}_1$は２点$\mathrm{P}_2$，$\mathrm{P}_3$から等距離にあるといえます。

Ａ(４，２)とするとき，上の定義にしたがって，次の問いに答えなさい。

（１）　点Ｂ(０，９)は原点Ｏと点Ａのどちらに近いといえますか。

（２）　領域$D=\{(x,\ y)\,|\,x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$において，２点Ｏ，Ａから等距離にある点Ｐの存在する領域Eを図示しなさい。

問題６．（必須）

n を正の整数とします。２次正方行列 $A=\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ について，$A^n=A^{-1}$ を満たす最小の n の値を求めなさい。ただし，A^{-1} は A の逆行列を表します。

問題７．（必須）

関数 $f(x)=x\,e^x$ について，次の問いに答えなさい。

（１）　$f(x)$ の４次までの導関数 $f'(x)$，$f''(x)$，$f'''(x)$，$f^{(4)}(x)$ を求めなさい。

（２）　$f(x)$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ を推測しなさい。

（３）　（２）で推測した $f^{(n)}(x)$ の式が正しいことを証明しなさい。　　　　（証明技能）